数理解析研究所講究録 1374 巻 2004 年 109-113

サブリーマン多様体の曲率

奈良女子大学理学部　森本　徹 (Tohru Morimoto)
Department of Mathematics, Nara Women's University

1　サブリーマン多様体

M を可微分多様体とする．接ベクトル束 TM の部分束 D と D 上のリーマン計量 σ の組 (D,σ) を M 上の**サブリーマン構造**という．ここで σ が D 上のリーマン計量であるとは，M の各点 x に対して x 上のファイバー D_x の正定値内積 $\sigma_x : D_x \times D_x \to \mathbb{R}$ が定まっていて対応 $x \mapsto \sigma_x$ が可微分であることをいう．サブリーマン構造を備えた多様体 (M,D,σ) を**サブリーマン多様体**と呼ぶ．

サブリーマン多様体 (M,D,σ) からサブリーマン多様体 (M',D',σ') への同型写像とは，可微分写像 $\Phi : M \to M'$ で $\Phi_* D = D', \Phi^*\sigma' = \sigma$ を満たすもののことである．このような同型写像が存在するとき，二つのサブリーマン多様体は同型であるという．

二つのサブリーマン多様体が (局所) 同型であるかどうかを判定すること，またそのために，サブリーマン多様体の (局所) 不変量を決定することはサブリーマン多様体に関する基本問題の一つであろう．サブリーマン多様体 (M,D,σ) は $D=TM$ のときリーマン多様体に他ならない．よく知られているように，リーマン多様体においては，曲率テンソルとそのすべての共変微分が局所不変量の完全系をなし，リーマン多様体の局所不変量は本質的にはリーマンの曲率テンソルだけである．ではサブリーマン多様体に対しても果たして曲率のようなものが定義できるであろうか．

本稿では，**ある正則性の条件を満たすサブリーマン多様体に対してカルタン接続が構成できること**を示す．このカルタン接続の曲率が，サブリーマン多様体の完全な不変量となり，その意味でサブリーマン多様体の曲率と呼ぶべきものとなるのである．

2　カルタン接続

$\mathfrak{g}$ をリー代数，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー代数，H を $\mathfrak{h}$ をリー代数に持つリー群とする．さらに，H の $\mathfrak{g}$ への表現が与えられていて $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は H 加群としての埋め込みであるとする．ここで $\mathfrak{h}$ は，随伴表現により H 加群とみなす．

(P,M,θ) が M 上のタイプ $(\mathfrak{g},H)$ の**カルタン接続**であるとは，P は M 上の H 主束であって，θ は $\mathfrak{g}$ に値をとる M 上の 1 形式であり，次の条件を満たすことである．

1) 任意の $z \in P$ に対して $\theta_z : T_zP \to \mathfrak{g}$ は同型写像．

2) $R_a^*\theta = a^{-1}\theta \quad (a \in H)$.

3) $\langle \theta, \tilde{A} \rangle = A \quad (A \in \mathfrak{h})$, ここで $\tilde{A}$ は A の導く P 上のベクトル場を表す．

(P,M,θ) を M 上のタイプ $(\mathfrak{g}, H)$ のカルタン接続とする.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h}$$

となるように補空間 $\mathfrak{g}_-$ をとり

$$\theta = \theta_- + \theta_{\mathfrak{h}}$$

と分解する. ただし θ_-, $\theta_{\mathfrak{h}}$ は　各々 $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{h}$ に値をとる 1 形式である. このとき次の構造方程式

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta,\theta] = \frac{1}{2}K(\theta_-,\theta_-)$$

を満たすような写像 (構造関数)

$$K : P \to \mathrm{Hom}(\wedge^2\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$$

が一意的に決まる. これをカルタン接続の曲率という.

(P,M,θ), (P',M',θ') をタイプ $(\mathfrak{g}, H)$ のカルタン接続とする. 可微分同相写像 $F : P \to P'$ で $F(za) = F(z)a$ $(z \in P,\ a \in H)$ かつ $F^*\theta' = \theta$ を満たすものをカルタン接続の同型写像という.

“M 上の幾何構造 γ に付随してカルタン接続 $(P,\ M,\theta)$ が構成される” というときには, 対応 $(M,\gamma) \mapsto (P,\ M,\theta)$ が functor として同型対応であるということが当然のこととして要請される. 即ち, 幾何構造 (M,γ), (M',γ') に対応するカルタン接続をそれぞれ $(P,\ M,\theta)$, $(P',\ M',\theta')$ とするとき, 幾何構造の同型 $f : (M,\gamma) \to (M',\gamma')$ はカルタン接続の同型 $F : P \to P'$ を自然に導き, 逆にカルタン接続の同型 $F : P \to P'$ は幾何構造の同型 $f : (M,\gamma) \to (M',\gamma')$ を自然に誘導することを暗黙のうちに要請している.

例　(M,g) を n 次元リーマン多様体とする P を M の直交枠とする, すなわち, $x \in M$ 上の P のファイバー P_x は n 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{E}^n$ から (T_xM, g_x) への直交変換全体のなす集合であり, $P = \cup_{x\in M}P_x$ である. これは $O(n)$ を構造群とする M 上の主束である. θ_- を P の基本形式, $\theta_{\mathfrak{o}(n)}$ を接続形式とする. θ_-, $\theta_{\mathfrak{o}(n)}$ はそれぞれ $\mathbb{E}^n$, $\mathfrak{o}(n)$ に値を持つ P 上の 1 形式であって次の構造方程式を満たす.

$$\begin{cases} d\theta_- & + & \theta_{\mathfrak{o}(n)} \wedge \theta_- & = & \frac{1}{2}K_1(\theta_-,\theta_-) \\ d\theta_{\mathfrak{o}(n)} & + & \frac{1}{2}[\theta_{\mathfrak{o}(n)}, \theta_{\mathfrak{o}(n)}] & = & \frac{1}{2}K_2(\theta_-,\theta_-) \end{cases}$$

ここで, K_1, K_2 は P 上の関数で, それぞれ, 値を $\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)$, $\mathrm{Hom}(\wedge^2\mathbb{E}^n, \mathfrak{o}(n))$ にとり, 接続の捩率, 曲率と呼ばれる. 捩率をゼロにするような接続がただ一つ存在する. それがレビチビタの接続である. $\theta_{\mathfrak{o}(n)}$ をレビチビタの接続形式とし,

$$\theta = \theta_- + \theta_{\mathfrak{o}(n)}$$

とおくと θ はユークリッド運動群のリー代数 $\mathbb{E}^n \oplus \mathfrak{o}(n)$ に値をもつ 1 形式であって (P,M,θ) はタイプ $(\mathbb{E}^n \oplus \mathfrak{o}(n), O(n))$ のカルタン接続であり, 構造方程式

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta,\theta] = \frac{1}{2}K_2(\theta_-,\theta_-)$$

を満たす. このカルタン接続の曲率 K_2 がリーマンの曲率に他ならない.

リーマン幾何の基本となる曲率を定義するのに敢えてカルタン接続を持ち出すこともないと思われるかも知れないが，この例がもっとも簡単かつ意味の深いカルタン接続の例である．共形構造，射影構造，CR 構造等々，いろいろな幾何構造に対してカルタン，田中昇らによってカルタン接続が構成されてきた．カルタン接続が構成できるためのおそらく最善と思われる判定条件が森本 [1] によって得られている．

3 サブリーマン構造に付随したカルタン接続

(M, D, σ) をサブリーマン多様体とする．これに対して M 上の層の列 $\{\mathcal{D}^p\}_{p<0}$ を次のように帰納的に定義する．

1) $\mathcal{D}^{-1} = \underline{D}$: D の局所切断の芽のなす層．

2) $\mathcal{D}^{p-1} = \mathcal{D}^p + [\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}^p] \quad (p \leq -1)$

このとき次が成り立つ．

$$[\mathcal{D}^p, \mathcal{D}^q] \subset \mathcal{D}^{p+q}$$

定義 1 ある正の整数 μ が存在して $\mathcal{D}^{-\mu} = \underline{TM}$ となるとき D は TM を生成する，または，Hörmander 条件 (HC) を満たすという．また，TM の部分ベクトル束 $\{D^p\}_{p<0}$ が存在して $\mathcal{D}^p = \underline{D^p}$ が成り立つとき，は D 正則であるという．

以下 D は正則かつを (HC) を満たすとする．点 x において

$$\mathfrak{m}_x = \bigoplus_{p<0} (\mathfrak{m}_p)_x, \quad (\mathfrak{m}_p)_x = (D^p)_x / (D^{p+1})_x$$

とおくと，$\mathfrak{m}_x$ には自然な方法でブラケットが定義され $\mathfrak{m}_x$ は階数付き巾零リー代数となる．また，$(\mathfrak{m}_{-1})_x$ には内積 σ_x が定義されていることを注意しておく．

一般に，巾零リー代数 $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ と $\mathfrak{g}_{-1}$ の内積 σ の組 $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ を**ユークリッド巾零リー代数**と呼ぶことにしよう．また，ϕ がユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ からユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{g}'_-, \sigma')$ への同型 (写像) であるとは，ϕ は $\mathfrak{g}_-$ から $\mathfrak{g}'_-$ への線形同型であって，次を満たすことである．

1) $\phi((\mathfrak{g}_p)) \subset \mathfrak{g}'_p$.

2) $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad (x, y \in \mathfrak{g}_-)$.

3) $\sigma'(\phi(u), \phi(v)) = \sigma(u, v) \quad (u, v \in \mathfrak{g}_{-1})$.

以上の言葉を用意すると，先のことは次のように述べられる：正則なサブリーマン多様体の各点 x において，その第 1 近似としてユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{m}_x, \sigma_x)$ が付随する．これらのユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{m}_x, \sigma_x)$ は点が異なると互いに同型とは限らないが，

定義 2 あるユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ があって，任意の $x \in M$ に対して，ユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{m}_x, \sigma_x)$ はユークリッド巾零リー代数 $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ に同型となるとき，(M, D, σ) は第1近似一定でタイプ $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ であるという.

今，$(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ はユークリッド巾零リー代数で $\mathfrak{g}_-$ は $\mathfrak{g}_{-1}$ から生成されているとする．$(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ の自己同型写像全体からなるリー群を G_0 とし，そのリー代数を $\mathfrak{g}_0$ で表す.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$$

とおくと，$\mathfrak{g}$ は有階リー代数であり，その上に G_0 が自然に作用している.

定理 正則で Hörmander 条件を満たすタイプ $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ のサブリーマン多様体に対してそれに付随したタイプ $(\mathfrak{g}, G_0)$ のカルタン接続が構成できる.

カルタン接続が存在するための一般的な判定条件とその構成方法 (森本 [1]) をサブリーマン構造に適用して上の定理が得られる．このとき，次の命題が基本となる (その証明には八ツ井の結果 [3] を用いる).

命題 $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ はユークリッド巾零リー代数で $\mathfrak{g}_-$ は $\mathfrak{g}_{-1}$ から生成されているとする．このとき，$\mathfrak{g}(= \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0)$ の (階数付きリー代数としての代数的な意味での) 延長を $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus \tilde{\mathfrak{g}}_p$ とすると，$\tilde{\mathfrak{g}}_p = 0$ $(p > 0)$ すなわち，$\mathfrak{g}$ の延長はそれ自身に一致する.

G_0 はコンパクトであることに注意すると，$\mathfrak{g}_{-1}$ の内積は自然に $\mathfrak{g}$ に拡張でき，G_0 は $\mathfrak{g}$ に直交変換として作用することが分かる．このことより，$(\mathfrak{g}, G_0)$ が判定条件 ([1], Prop. 3.10.1) を満たすことが確かめられ，サブリーマン構造 (M, D, σ) に付随するカルタン接続 (P, θ) が存在するのである．それが具体的にどのよう構成されるかを見るには，[1], [2] の一般的な構成方法をたどればよいが，大まかなところを見ておこう.

まず，M 上の G_0 主束 $P^{(0)}$ から出発するが，これは次のように作られる．各 $x \in M$ にたいして $P_x^{(0)}$ を $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ から $(\mathfrak{m}_x, \sigma_x)$ への同型写像全体のなす集合とし，$P^{(0)} = \cup_{x \in M} P_x^{(0)}$ とおく．これは M 上の G_0 主束となっている.

一般的な構成方法はこの $P^{(0)}$ から始め次々と高次の主束 $P^{(0)} \leftarrow P^{(1)} \leftarrow P^{(2)} \leftarrow \cdots$, を作っていくのである．今のサブリーマンの場合の特徴的なことはバンドルとして $P^{(k)}$ $(k \geq 0)$ はすべて同型となることである．従ってカルタン接続の構成されるバンドル P は $P^{(0)}$ そのものでよい．しかしながら，$\mathfrak{g}$ に値を持つ 1 形式 θ を自然なアルゴリズムに従って構成するためには，上の構成を $P^{(\mu)}$ まで行なわねばならないのである.

カルタン接続 θ は曲率 $K : P \to \mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ が

$$\partial^* K = 0$$

を満たすという条件によって同型を除いて一意的に決まる．ここで，∂^* は作用素

$$\partial^* : \mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \to \mathrm{Hom}(\wedge^1 \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$$

であって，微分複体のコバンダリー作用素

$$\partial : \mathrm{Hom}(\wedge^k \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \to \mathrm{Hom}(\wedge^{k+1} \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$$

の形式的随伴作用素として決まるものである．$\mathrm{Hom}(\wedge \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ の内積としては $\mathfrak{g}$ の先に述べた内積から自然に拡張したものを用いる．

いくつか注意を述べておこう．

注意 1 幾何構造に対してひとたびカルタン接続が構成されると，その幾何構造の同値問題はそのカルタン接続を通じて扱うことができ，先にも述べたように幾何構造の不変量はすべてカルタン接続の曲率から得られる．また，同型群についてもカルタン接続から詳しい情報が得られる．今の場合には，次のことが直ちに分かる．

"正則で Hörmander 条件を満たすタイプ $(\mathfrak{g}_-, \sigma)$ のサブリーマン多様体の同型群はリー群になりその次元は $\mathfrak{g}$ の次元以下である．"

注意 2 リーマン多様体の場合はその第 1 次近似はユークリッドベクトル空間であり，その同型類は次元だけできまるが，サブリーマン多様体の第 1 次近似，すなわちユークリッド巾零リー代数は実に多様である．曲率のあらわれ方もそのユークリッド巾零リー代数に応じて変わる．それらを具体的に見るにはコホモロジー群の 2 次のところ：

$$H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{r>0} H^2{}_r(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$$

を調べることが必要となる．これらを詳しく調べることは，特に例えば，サブリーマン接触多様体においても十分おもしろい問題である．

注意 3 これまでの議論では，サブリーマン多様体の第 1 次近似が一定であることを仮定したが，第 1 次近似が一定とならないようなおもしろいサブリーマン多様体も沢山ある．これらを扱うには"一般化されたカルタン接続"の概念を導入することが必要となる．これについてはまた別のところで詳しく述べたい．

参考文献

[1] T. Morimoto, Geometric structures on filtered manifolds, Hokkaido Math. J., 22(1993), 263-347.

[2] T. Morimoto, Lie Algebras, Geometric Structures and Differential Equations on Filtered Manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics 37 (Mathematical Society of Japan, 2002) 205 - 252.

[3] T. Yatsui, On pseudo-product graded Lie algebras, Hokkaido Math. J., 17(1988), 333-343.